अध्याय 12

पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

- मौलिक ठोसों, अर्थात् घनाभ, शंकु, बेलन, गोले और अर्धगोले में से किन्हीं दो ठोसों के संयोजन से बनी वस्तु का पृष्ठीय क्षेत्रफल।
- मौलिक ठोसों, अर्थात् घनाभ, शंकु, बेलन, गोले और अर्धगोले में से किन्हीं दो ठोसों के संयोजन से बनी वस्तु का आयतन।
- शंकु के छिन्नक से संबंधित सूत्र हैं:

  (i) शंकु के छिन्नक का आयतन $= \frac{1}{3}\pi h[r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2]$

  (ii) शंकु के छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi(r_1+r_2)l$

  (iii) ठोस शंकु के छिन्नक का कुल या संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi l(r_1+r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$, जहाँ

  $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$,

  h = छिन्नक की ऊर्ध्वाधर ऊँचाई, l = छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई तथा

  r_1 और r_2 छिन्नक के आधारों (सिरों) की त्रिज्याएँ हैं।

- ठोस अर्धगोला : यदि अर्धगोले की त्रिज्या r है, तो वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$,

  कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 3\pi r^2$, तथा आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

- गोलाकार खोल (शेल) का आयतन $= \frac{4}{3}\pi\left(r_1^3 - r_2^3\right)$, जहाँ r_1 और r_2 क्रमशः बाहरी और आंतरिक त्रिज्याएँ हैं।

  इस पूरे अध्याय में, जब तक कि अन्यथा न कहा जाये, $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

दिये हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

आकृति 12.1

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : एक कीप (फनॅल) (आकृति 12.1) निम्नलिखित का संयोजन है

(A) एक शंकु और एक बेलन (B) शंकु का छिन्नक और एक बेलन
(C) एक अर्धगोला और एक बेलन (D) एक अर्धगोला और एक शंकु

हल : उत्तर (B)

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : यदि पानी से पूरा भरे हुए, त्रिज्या 5 cm और ऊँचाई 6 cm वाले एक बेलनाकार कप में त्रिज्या 2.1 cm का एक कंचा डाला जाये, तो बेलनाकार कप में से कितना पानी बाहर निकल जायेगा?

(A) 38.8 cm^3 (B) 55.4 cm^3 (C) 19.4 cm^3 (D) 471.4 cm^3

हल : उत्तर (A)

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : 22 cm किनारे वाली एक घनाकार आइसक्रीम ब्रिक (ice cream brick) को त्रिज्या 2 cm और ऊँचाई 7 cm वाले आइसक्रीम शंकुओं में पूरी तरह ऊपर तक भर कर, कुछ बच्चों में वितरित किया जाना है। कितने बच्चों को ये आइसक्रीम शंकु प्राप्त हो पाएँगे?

(A) 163 (B) 263 (C) 363 (D) 463

हल : उत्तर (C)

प्रतिदर्श प्रश्न 4 : ऊँचाई h cm के एक शंकु के छिन्नक के सिरों की त्रिज्याएँ r_1 cm और r_2 cm हैं। शंकु के इस छिन्नक का (cm^3 में) आयतन है

(A) $\frac{1}{3}\pi h[r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2]$ (B) $\frac{1}{3}\pi h[r_1^2 + r_2^2 - r_1 r_2]$

(C) $\frac{1}{3}\pi h[r_1^2 - r_2^2 + r_1 r_2]$ (D) $\frac{1}{3}\pi h[r_1^2 - r_2^2 - r_1 r_2]$

हल : उत्तर (A)

प्रतिदर्श प्रश्न 5 : 4.2 cm किनारे वाले एक घन में से काटे जा सकने वाले सबसे बड़े शंकु का आयतन है

(A) 9.7 cm^3 (B) 77.6 cm^3 (C) 58.2 cm^3 (D) 19.4 cm^3

हल : उत्तर (D)

प्रश्नावली 12.1

दिये हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

1. एक किनारे पर नुकीली बनायी गयी एक बेलनाकार पेंसिल निम्नलिखित का संयोजन है

(A) एक शंकु और एक बेलन (B) शंकु का छिन्नक और एक बेलन
(C) एक अर्धगोला और एक बेलन (D) दो बेलन

2. एक सुराही निम्नलिखित का संयोजन है

(A) एक गोला और एक बेलन (B) एक अर्धगोला और एक बेलन
(C) दो अर्धगोले (D) एक बेलन और एक शंकु

3. एक साहुल (देखिए आकृति 12.2) निम्नलिखित का संयोजन है:

आकृति 12.2

(A) एक शंकु और एक बेलन (B) एक अर्धगोला और एक शंकु
(C) शंकु का छिन्नक और एक बेलन (D) गोला और बेलन

4. एक गिलास (देखिए आकृति 12.3) का आकार प्राय: निम्न रूप का होता है

(A) एक शंकु (B) शंकु का छिन्नक
(C) एक बेलन (D) एक गोला

आकृति 12.3

5. गिल्ली-डंडे के खेल में, गिल्ली का आकार (देखिए आकृति 12.4) निम्नलिखित का संयोजन है

(A) दो बेलन (B) एक शंकु और एक बेलन

(C) दो शंकु और एक बेलन (D) दो बेलन और एक शंकु

आकृति 12.4

6. बैडमिंटन खेलने में प्रयोग की जाने वाली शटलकॉक (चिड़िया) का आकार निम्नलिखित का संयोजन है

(A) एक बेलन और एक गोला (B) एक बेलन और एक अर्धगोला

(C) एक गोला और एक शंकु (D) शंकु का छिन्नक और अर्धगोला

7. एक शंकु को उसके आधार के समांतर एक तल की सहायता से काटा जाता है और फिर तल के एक ओर बने शंकु को हटा दिया जाता है। तल के दूसरी ओर बचा हुआ नया भाग कहलाता है एक

(A) शंकु का छिन्नक (B) शंकु

(C) बेलन (D) गोला

8. एक 22 cm आंतरिक किनारे वाले खोखले घन को 0.5 cm व्यास वाले गोलाकार कंचों से भरा जाता है तथा यह कल्पना की जाती है कि घन का $\frac{1}{8}$ स्थान भरा नहीं जा सकता है। तब घन में समावेशित होने वाले कंचों की संख्या है

(A) 142296 (B) 142396 (C) 142496 (D) 142596

9. क्रमश: आंतरिक और बाहरी व्यास 4 cm और 8 cm वाले एक धातु के गोलाकार खोल को पिघलाकर आधार व्यास 8 cm के एक शंकु के आकार में ढाला जाता है। इस शंकु की ऊँचाई है

(A) 12cm (B) 14cm (C) 15cm (D) 18cm

10. विमाओं 49cm × 33cm × 24cm के घनाभ के आकार के लोहे के किसी ठोस टुकड़े को पिघलाकर एक ठोस गोले के रूप में ढाला जाता है। गोले की त्रिज्या है

(A) 21cm (B) 23cm (C) 25cm (D) 19cm

11. कोई मिस्त्री ईंटों से विमाओं 270cm× 300cm × 350cm की एक दीवार बनाता है, जिनमें से प्रत्येक ईंट की माप 22.5cm × 11.25cm × 8.75cm है। यदि यह मान लिया जाए कि दीवार का

$\frac{1}{8}$ भाग मसाले से भरा जाता है, तो दीवार को बनाने में लगी ईंटों की संख्या है

(A) 11100 (B) 11200 (C) 11000 (D) 11300

12. आधार व्यास 2 cm और ऊँचाई 16 cm वाले धातु के एक ठोस बेलन को पिघला कर समान माप के बारह ठोस गोले बनाये जाते हैं। प्रत्येक गोले का व्यास है

(A) 4 cm (B) 3 cm (C) 2 cm (D) 6 cm

13. तिर्यक ऊँचाई 45 cm वाली एक बाल्टी के ऊपरी और निचले सिरों की त्रिज्याएँ क्रमश: 28 cm और 7 cm हैं। इस बाल्टी का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल है

(A) 4950 cm^2 (B) 4951 cm^2 (C) 4952 cm^2 (D) 4953 cm^2

14. दवाई का एक कैप्सूल 0.5 cm व्यास वाले एक बेलन के आकार का है, जिसके दोनों सिरों पर दो अर्धगोले लगे हुए हैं। संपूर्ण कैप्सूल की लंबाई 2 cm है। इस कैप्सूल की धारिता है

(A) 0.36 cm^3 (B) 0.35 cm^3 (C) 0.34 cm^3 (D) 0.33 cm^3

15. एक ही आधार त्रिज्या r वाले दो ठोस अर्धगोलों को उनके आधारों के अनुदिश जोड़ दिया गया है। तब नये ठोस का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल है

(A) $4\pi r^2$ (B) $6\pi r^2$ (C) $3\pi r^2$ (D) $8\pi r^2$

16. त्रिज्या r cm और ऊँचाई h cm ($h>2r$) वाले एक लंब वृत्तीय बेलन में ठीक समावेशित होने वाले गोले का व्यास है

(A) r cm (B) $2r$ cm (C) h cm (D) $2h$ cm

17. ठोस को एक आकार से दूसरे आकार में बदलने पर, नये आकार का आयतन

(A) बढ़ जाता है (B) घट जाता है (C) वही रहता है (D) दुगुना हो जाता है

18. एक बाल्टी के दोनों वृत्ताकार सिरों के व्यास 44 cm और 24 cm हैं तथा बाल्टी की ऊँचाई 35 cm है। इस बाल्टी की धारिता है

(A) 32.7 लीटर (B) 33.7 लीटर (C) 34.7 लीटर (D) 31.7 लीटर

19. एक लंब वृत्तीय शंकु में, उसके आधार के समांतर खींचे गये तल द्वारा काटा गया अनुप्रस्थ-काट होता है एक

(A) वृत्त (B) शंकु का छिन्नक (C) गोला (D) अर्धगोला

20. दो गोलों के आयतनों का अनुपात 64 : 27 है। उनके पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात है

(A) 3:4 (B) 4:3 (C) 9:16 (D) 16:9

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

सत्य या असत्य लिखिए और अपने उत्तर का औचित्य दीजिए :

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : यदि आधार त्रिज्या r और ऊँचाई h वाले एक ठोस शंकु को उसी आधार त्रिज्या और ऊँचाई वाले एक ठोस बेलन के ऊपर रखा जाये, तो इस आकार का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $\pi r\sqrt{h^2+r^2}+2\pi rh$ होगा।

हल : सत्य। क्योंकि इस आकार का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल दोनों ठोसों के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफलों के योग के बराबर है।

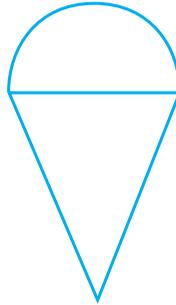
प्रतिदर्श प्रश्न 2 : स्टील की एक गोलाकार गेंद को पिघलाकर आठ नयी सर्वसम (अर्थात् एक जैसी) गेंदें बनायी गयी हैं। तब, प्रत्येक नयी गेंद की त्रिज्या प्रारंभिक गेंद की त्रिज्या का $\frac{1}{8}$ होगी।

हल : असत्य। मान लीजिए कि स्टील की प्रारंभिक गेंद की त्रिज्या r है तथा r_1 पिघला कर बनायी गयी प्रत्येक नयी गेंद की त्रिज्या है।

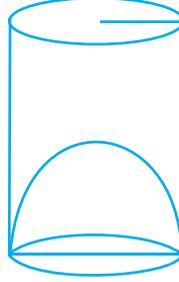
अतः, $\frac{4}{3}\pi r^3 = 8\times\frac{4}{3}\pi r_1^3$, इससे $r_1 = \frac{r}{2}$ प्राप्त होता है।

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : भुजा a वाले दो सर्वसम, अर्थात् एक जैसे घनों को सिरे से सिरा मिलाकर जोड़ दिया गया है। तब, परिणामी घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $12a^2$ है।

हल : असत्य। भुजा a वाले एक घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $6a^2$ होता है। यदि a भुजाओं वाले दो सर्वसम फलकों को मिला कर जोड़ा जाये, तो इस प्रकार बने घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $10a^2$ होगा।

प्रतिदर्श प्रश्न 4 : आकृति 12.5 में दर्शाये गये *लट्टू* का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल अर्धगोले के कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल और शंकु के कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल के योग के बराबर है।

आकृति 12.5

हल : असत्य। लट्टू का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल अर्धगोले के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल और शंकु के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल के योग के बराबर है।

प्रतिदर्श प्रश्न 5 : आकृति 12.6 में दर्शाये गये बर्तन की वास्तविक धारिता बेलन के आयतन और अर्धगोले के आयतन के अंतर के बराबर है।

आकृति 12.6

हल : सत्य। बर्तन की वास्तविक धारिता गिलास के अंदर रिक्त स्थान है जिसमें कोई द्रव डालने पर समावेशित हो सके।

प्रश्नावली 12.2

निम्नलिखित में से प्रत्येक में 'सत्य' या 'असत्य' लिखिए तथा अपने उत्तर का औचित्य दीजिए :

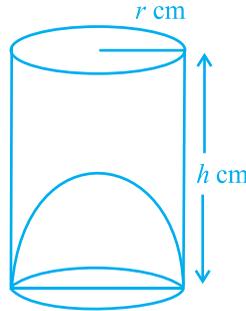
1. समान आधार त्रिज्या r वाले दो सर्वसम ठोस अर्धगोलों को उनके आधारों के अनुदिश जोड़ दिया गया है। इस संयोजन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $6\pi r^2$ है।

2. त्रिज्या r और ऊँचाई h वाले एक बेलन को उसी ऊँचाई और त्रिज्या वाले बेलन के ऊपर रख दिया जाता है। इस प्रकार बने आकार का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $4\pi rh + 4\pi r^2$ है।

3. त्रिज्या r और ऊँचाई h वाले एक ठोस शंकु को उसी आधार त्रिज्या और ऊँचाई वाले एक ठोस बेलन के ऊपर रखा जाता है, जो शंकु की हैं। संयोजित ठोस का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $\pi r\left[\sqrt{r^2+h^2}+3r+2h\right]$ है।

4. भुजा a वाले एक घनाकार बक्से के अंदर एक ठोस गेंद पूर्णतया ठीक-ठीक रखी जा सकती है। गेंद का आयतन $\frac{4}{3}\pi a^3$ है।

5. शंकु के एक छिन्नक का आयतन $\frac{1}{3}\pi h[r_1^2 + r_2^2 - r_1r_2]$ होता है, जहाँ h छिन्नक की ऊर्ध्वाधर ऊँचाई है और r_1, r_2 सिरों की त्रिज्याएँ हैं।

6. एक बेलनाकार बर्तन, जिसकी तली में अर्धगोलाकार भाग आकृति 12.7 में दर्शाए अनुसार ऊपर की ओर उठा हुआ है, की धारिता $\frac{\pi r^2}{3}[3h-2r]$ है।

आकृति 12.7

7. शंकु के एक छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $\pi l\,(r_1+r_2)$ होता है, जहाँ $l=\sqrt{h^2+(r_1+r_2)^2}$ है, r_1 और r_2 छिन्नक के दोनों सिरों की त्रिज्याएँ हैं तथा h ऊर्ध्वाधर ऊँचाई है।

8. धातु की एक खुली बाल्टी इस आकार जैसी है कि उसी धातु की चादर से बने बेलनाकार (खोखला)आधार पर एक शंकु का छिन्नक रखा हुआ है। इसके लिए प्रयुक्त धातु की चादर का पृष्ठीय क्षेत्रफल बराबर है:

शंकु के छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + वृत्ताकार आधार का क्षेत्रफल + बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : 14 cm किनारे वाले एक घन में से अधिकतम माप का एक शंकु काट कर निकाल लिया जाता है। इस शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा शंकु को काट कर निकाल लेने के बाद शेष ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : किनारे 14 cm वाले घन में से काटे जा सकने वाले अधिकतम माप के शंकु की आधार त्रिज्या 7 cm और ऊँचाई 14 cm होगी।

इसलिए, शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi rl + \pi r^2$

$$=\frac{22}{7}\times 7\times\sqrt{7^2+14^2}+\frac{22}{7}(7)^2$$

$$=\frac{22}{7}\times 7\times\sqrt{245}+154=(154\sqrt{5}+154)\text{cm}^2=154\left(\sqrt{5}+1\right)\text{cm}^2$$

घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 6 \times (14)^2 = 6 \times 196 = 1176 \text{ cm}^2$

अतः, शंकु को काट कर निकालने के बाद शेष बचे ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= \left(1176 - 154 + 154\sqrt{5}\right)\text{cm}^2 = (1022 + 154\sqrt{5}) \text{ cm}^2$

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : एक 10.5 cm त्रिज्या वाले ठोस धातु के गोले को पिघलाकर उसे अनेक छोटे शंकुओं के रूप में ढाला जाता है, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 3.5 cm और ऊँचाई 3 cm है। इस प्रकार बनाये गये शंकुओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : धातु के ठोस गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi(10.5)^3 \text{ cm}^3$

त्रिज्या 3.5 cm और ऊँचाई 3 cm वाले एक शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi(3.5)^2 \times 3 \text{ cm}^3$

अतः, इस प्रकार बने कुल शंकुओं की संख्या $= \dfrac{\frac{4}{3}\pi \times 10.5 \times 10.5 \times 10.5}{\frac{1}{3}\pi \times 3.5 \times 3.5} = 126$

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : कोई नहर 300 cm चौड़ी और 120 cm गहरी है। इस नहर में पानी 20 km/h की चाल से बह रहा है। वह 20 मिनट में कितने क्षेत्रफल की सिंचाई करेगी, यदि इसके लिए 8 cm खड़े पानी की आवश्यकता होती है?

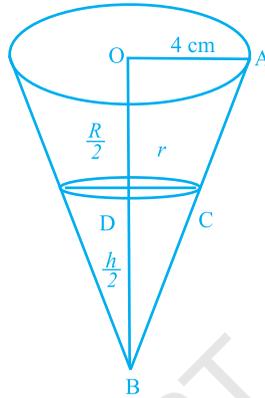
हल : 1 घंटे में नहर के अंदर बहने वाले पानी का आयतन = नहर की चौड़ाई × नहर की गहराई × नहर के पानी की चाल $= 3 \times 1.2 \times 20 \times 1000 \text{m}^3 = 72000 \text{m}^3$

20 मिनट में पानी का आयतन $= \dfrac{72000 \times 20}{60} \text{m}^3 = 24000 \text{m}^3$

अतः, 20 मिनट में सींचा गया क्षेत्रफल, यदि 8 cm, अर्थात् 0.08 m खड़े पानी की आवश्यकता है

$= \dfrac{24000}{0.08} \text{m}^2 = 300000 \text{m}^2 = 30$ हेक्टेयर।

प्रतिदर्श प्रश्न 4 : एक 4 cm त्रिज्या वाले शंकु को उसके अक्ष के मध्य-बिंदु से होकर आधार के समांतर समतल द्वारा दो भागों में विभााजित किया गया है। दोनों भागों के आयतनों की तुलना कीजिए।

हल : मान लीजिए कि h दिये हुए शंकु की ऊँचाई है। इस शंकु को अक्ष के मध्य-बिंदु से होकर आधार के समांतर समतल द्वारा दो भागों में विभाजित करने पर, हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है। (देखिए आकृति 12.8)

आकृति 12.8

दो समरूप त्रिभुजों OAB और DCB त्रिभुजों में, हमें प्राप्त है: $\frac{OA}{CD}=\frac{OB}{BD}$ इससे $\frac{4}{r}=\frac{h}{\frac{h}{2}}$ प्राप्त होता है। अर्थात् $r = 2$ है।

अत:, $\frac{\text{छोटे शंकु का आयतन}}{\text{शंकु के छिन्नक का आयतन}} = \frac{\frac{1}{3}\pi\times(2)^2\times\frac{h}{2}}{\frac{1}{3}\pi\times\frac{h}{2}[4^2+2^2+4\times2]} = \frac{1}{7}$

इसलिए, छोटे शंकु के आयतन का शंकु के छिन्नक के आयतन से अनुपात 1:7 है।

प्रतिदर्श प्रश्न 5 : किसी धातु के तीन घनों, जिनके किनारे 3 : 4 : 5 के अनुपात में हैं, को पिघलाकर एक अकेले घन के रूप में बदला जाता है, जिसका विकर्ण $12\sqrt{3}$ cm है। तीनों घनों के किनारे ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि तीनों घनों के किनारे (cm में) क्रमश: $3x$, $4x$ और $5x$ हैं। अत: पिघलने के बाद, इन घनों का आयतन $= (3x)^3 + (4x)^3 + (5x)^3 = 216x^3$ cm³

मान लीजिए कि पिघलाने के बाद, बनाये गये नये घन की भुजा a cm है। इसलिए, $a^3 = 216x^3$

अत:, $a = 6x$ है। जिससे विकर्ण $= \sqrt{a^2+a^2+a^2} = a\sqrt{3}$

परंतु यह दिया है कि नये घन का विकर्ण $12\sqrt{3}$ cm है। अतः $a\sqrt{3}=12\sqrt{3}$, अर्थात् $a = 12$ है। इससे $x = 2$ प्राप्त होता है। अतः, तीनों घनों के किनारे क्रमशः 6 cm, 8 cm और 10 cm हैं।

प्रश्नावली 12.3

1. एक 3 cm, 4 cm और 5 cm किनारों वाले धातु के तीन ठोस घनों को पिघलाकर एक अकेला घन बनाया गया है। इस प्रकार बने घन का किनारा ज्ञात कीजिए।

2. विमाओं $9 \text{ cm} \times 11\text{cm} \times 12\text{cm}$ वाले एक सीसे के घनाभाकार ठोस से 3 cm व्यास वाली कितनी गोलियाँ बनायी जा सकती हैं?

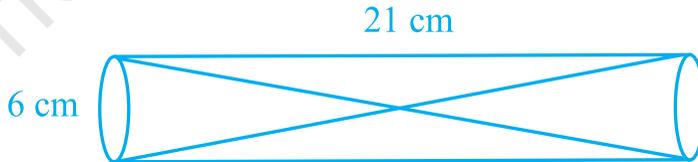
3. कोई बाल्टी एक शंकु के छिन्नक के आकार की है और इसमें 28.490 लीटर पानी आ सकता है। इसके ऊपरी और निचले सिरों की त्रिज्याएँ क्रमशः 28 cm और 21 cm हैं। इस बाल्टी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

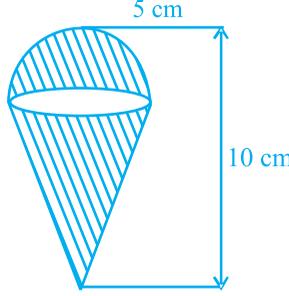
4. त्रिज्या 8 cm और ऊँचाई 12 cm वाले एक शंकु को उसकी अक्ष के मध्य-बिंदु से होकर जाने वाले और आधार के समांतर तल द्वारा दो भागों में विभाजित किया जाता है। दोनों भागों के आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

5. दो सर्वसम घनों, जिनमें से प्रत्येक का आयतन 64 cm^3 है, को सिरे से सिरा मिला कर जोड़ा जाता है। इस प्रकार प्राप्त घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल क्या है?

6. भुजा 7 cm वाले एक ठोस घन में 7 cm ऊँचाई और 3 cm त्रिज्या वाले एक शंकु के आकार का छेद किया गया है। शेष ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

7. समान आधार त्रिज्या 8 cm और समान ऊँचाई 15 cm वाले दो शंकुओं को उनके आधारों के अनुदिश जोड़ा जाता है। इस प्रकार बने आकार का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

8. दो ठोस शंकुओं को एक बेलनाकार नली में आकृति 12.9 में दर्शाए अनुसार रखा जाता है। इनकी धारिताओं का अनुपात 2:1 है। इन शंकुओं की ऊँचाइयाँ और धारिताएँ ज्ञात कीजिए। बेलन के शेष भाग का आयतन भी ज्ञात कीजिए।

आकृति 12.9

9. आकृति 12.10 में, एक आइसक्रीम शंकु दर्शाया गया है, जिसमें आइसक्रीम भरी हुई है, तथा इसकी त्रिज्या 5 cm और ऊँचाई 10 cm है। आइसक्रीम का आयतन ज्ञात कीजिए, जबकि शंकु का $\frac{1}{6}$ भाग आइसक्रीम से रिक्त रहता है।

आकृति 12.10

10. एक 7 cm व्यास वाले बेलनाकार बीकर, जिसमें कुछ पानी भरा है, में 1.4 cm व्यास वाले कंचे डाले जाते हैं। कंचों की वह संख्या ज्ञात कीजिए जिनको बीकर में डालने से पानी का स्तर 5.6 cm ऊपर उठ जायेगा।

11. विमाओं 66 cm, 42 cm और 21 cm वाले एक ठोस घनाभाकार सीसे के टुकड़े में से 4.2 cm वाली कितनी सीसे की गोलियाँ प्राप्त की जा सकती हैं?

12. एक 44 cm किनारे वाले सीसे के ठोस घन में से 4 cm व्यास वाली कितनी सीसे की गोलियाँ बनायी जा सकती हैं?

13. 24 m लंबी, 0.4 m मोटी और 6m ऊँची एक दीवार का ईंटों से निर्माण कराया जाता है, जिनमें से प्रत्येक ईंट की विमाएँ 25 cm × 16 cm × 10 cm हैं। यदि दीवार के आयतन का $\frac{1}{10}$ भाग मसाले से भरा जाता है, तो दीवार के निर्माण में लगने वाली ईंटों की संख्या ज्ञात कीजिए।

14. आधार व्यास 1.5 cm और ऊँचाई 0.2 cm वाली धातु की वृत्ताकार चकतियों की संख्या ज्ञात कीजिए जिनको पिघलाकर 10 cm ऊँचाई और 4.5 cm व्यास का एक ठोस लंब वृत्तीय बेलन बनाया जा सके।

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1: कोई बाल्टी शंकु के एक छिन्नक के रूप की है जिसकी ऊँचाई 30 cm है तथा निचले और ऊपरी सिरों की त्रिज्याएँ क्रमश: 10 cm और 20 cm हैं। इस बाल्टी की धारिता तथा पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। साथ ही, इस बाल्टी को पूरा भर सकने वाले दूध की 25 रु प्रति लीटर की दर से लागत भी ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)।

हल : बाल्टी की धारिता (या आयतन) $= \frac{\pi h}{3}[r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2]$

यहाँ, $h = 30$ cm, $r_1 = 20$ cm और $r_2 = 10$ cm है।

अतः, बाल्टी की धारिता $= \frac{3.14 \times 30}{3}[20^2 + 10^2 + 20 \times 10]$ cm³ = 21.980 लीटर

1 लीटर दूध की लागत = 25 रु

इसलिए, 21.980 लीटर दूध की लागत = 21.980 रु × 25 रु = 549.50 रु

बाल्टी का पृष्ठीय क्षेत्रफल = बाल्टी का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल
+ निचले सिरे का क्षेत्रफल

$= \pi l(r_1 + r_2) + \pi r_2^2$, जहाँ $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

अब $l = \sqrt{900 + 100}$ cm $= 31.62$ cm

अतः, बाल्टी का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 3.14 \times 31.62(20 + 10) + 3.14\,(10)^2$

$= 3.14\,(948.6 + 100)$ cm²

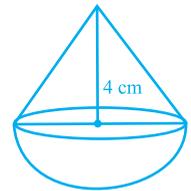
$= \frac{22}{7}[1048.6]$ cm² = 3295.6 cm²

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : एक ठोस खिलौना ऐसे आकार का है जैसे कि एक अर्धगोले पर एक लंब वृत्तीय शंकु रख दिया गया है। शंकु की ऊँचाई 4 cm है और आधार का व्यास 8 cm है। इस खिलौने का आयतन ज्ञात कीजिए। यदि इस खिलौने के परिगत कोई घन है, तो इस घन और खिलौने के आयतनों का अंतर ज्ञात कीजिए। साथ ही, इस खिलौने का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।

आकृति 12.11

हल : मान लीजिए कि अर्धगोले और शंकु की त्रिज्या r है तथा शंकु की ऊँचाई h है (देखिए आकृति 12.11)।

खिलौने का आयतन = अर्धगोले का आयतन + शंकु का आयतन

$$= \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \left(\frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 4^3 + \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 4^2 \times 4\right) \text{cm}^3 = \frac{1408}{7} \text{ cm}^3$$

इस ठोस के परिगत एक घन है। अत:, घन का किनारा 8 cm लंबाई का होना चाहिए।

इसलिए, घन का आयतन $= 8^3 \text{ cm}^3 = 512 \text{ cm}^3$

अत:, घन और खिलौने के आयतनों का अंतर $= \left(512 - \frac{1408}{7}\right) \text{cm}^3 = 310.86 \text{ cm}^3$

खिलौने का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= \pi rl + 2\pi r^2$, जहाँ $l = \sqrt{h^2 + r^2}$ है।

$= \pi r \, (l + 2r)$

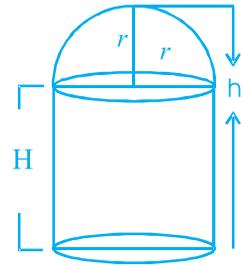
$= \frac{22}{7} \times 4 \; \sqrt{4^2 + 4^2} + 2 \times 4 \; \text{cm}^2$

$= \frac{22}{7} \times 4 \; 4\sqrt{2} + 8 \; \text{cm}^2$

$= \frac{88 \times 4}{7} \; \sqrt{2} + 2 \; \text{cm}^2$

$= 171.68 \text{ cm}^2$

आकृति 12.12

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : एक भवन इस आकार का है जैसे कि एक बेलन के ऊपर अर्धगोलाकार गुंबज बनी हो (देखिए आकृति 12.12)। गुंबज के आधार का व्यास भवन की संपूर्ण ऊँचाई का $\frac{2}{3}$ है। इस भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए, यदि इसके अंदर $67\frac{1}{21}$ m^3 वायु है।

हल : मान लीजिए कि अर्धगोलाकार गुंबज की त्रिज्या r मीटर है तथा भवन की संपूर्ण ऊँचाई h मीटर है।

क्योंकि गुंबज का आधार व्यास भवन की संपूर्ण ऊँचाई का $\frac{2}{3}$ है, इसलिए $2r = \frac{2}{3}h$ है।

इससे $r = \frac{h}{3}$ प्राप्त होता है। मान लीजिए कि बेलनाकार भाग की ऊँचाई H मीटर है।

अत:, $H = h - \frac{h}{3} = \frac{2}{3}h$ मीटर।

भवन के अंदर की वायु का आयतन = गुंबज के अंदर की वायु + बेलन के अंदर की वायु

$$= \frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 H \text{, जहाँ H बेलनाकार भाग की ऊँचाई है।}$$

$$= \frac{2}{3}\pi\left(\frac{h}{3}\right)^3 + \pi\left(\frac{h}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}h\right) = \frac{8}{81}\pi h^3 \text{ घन मीटर}$$

भवन के अंदर की वायु का आयतन $67\frac{1}{21}$ m^3 है। अत:, $\frac{8}{81}\pi h^3 = \frac{1408}{21}$ है। इससे $h = 6$ m प्राप्त होता है।

प्रश्नावली 12.4

1. त्रिज्या 8 cm वाले एक धातु के ठोस अर्धगोले को पिघलाकर आधार त्रिज्या 6 cm वाले एक लंब वृत्तीय शंकु के रूप में ढाला जाता है। शंकु की ऊँचाई निर्धारित कीजिए।

2. आधार 11 m × 6 m वाले एक घनाभाकार पानी की टंकी में 5 m की ऊँचाई तक पानी भरा है। यदि इस पानी को 3.5 m त्रिज्या वाली एक बेलनाकार टंकी में स्थानांतरित कर दिया जाये, तो इस बेलनाकार टंकी में पानी के स्तर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

3. लोहे का एक खुला संदूक बनाने के लिए कितने घन सेंटीमीटर लोहे की आवश्यकता होगी, यदि इस संदूक की बाहरी विमाएँ 36 cm, 25 cm और 16.5 cm हैं, जबकि लोहे की मोटाई 1.5 cm है। यदि 1 घन सेंटीमीटर लोहे का भार 7.5 g है, तो इस संदूक का भार भी ज्ञात कीजिए।

4. किसी फाउन्टेन पेन की नली, जो बेलन के आकार की है, 7cm लंबी है और इसका व्यास 5 mm है। इस पेन की नली में पूरी भरी स्याही से औसतन 3300 शब्द लिखे जा सकते हैं। स्याही की उस बोतल से कितने शब्द लिखे जा सकते हैं, जिसमें 1 लीटर की $\frac{1}{5}$ भाग स्याही है?

5. व्यास 5 mm वाले एक बेलनाकार पाइप के माध्यम से पानी 10 m प्रति मिनट की दर से बह रहा है। आधार व्यास 40 cm और 24 cm गहरे एक शंकु के आकार के बर्तन को पाइप से भरने के लिए कितना समय लगेगा?

6. चावलों की एक ढेरी 9m व्यास और 3.5m ऊँचाई वाले एक शंकु के आकार की है। इन चावलों का आयतन ज्ञात कीजिए। इस ढेरी को केवल ढकने मात्र के लिए कितने कैनवस कपड़े की आवश्यकता होगी?

7. एक फैक्टरी प्रति दिन 120000 पेंसिल बनाती है। ये पेंसिलें बेलन के आकार की हैं तथा प्रत्येक की लंबाई 25 cm और आधार की परिधि 1.5 cm है। 0.05 रु प्रति dm^2 की दर से एक दिन में निर्मित पेंसिल के वक्र पृष्ठों पर रंग करवाने की लागत निर्धारित कीजिए।

8. एक 14 cm व्यास वाले पाइप के माध्यम से पानी 15 km/h की दर से एक घनाभाकार तालाब में जा रहा है, जो 50m लंबा और 44m चौड़ा है। कितने समय बाद, तालाब में पानी का स्तर 21 cm ऊँचा हो जायेगा?

9. $4.4 \text{ m} \times 2.6 \text{ m} \times 1\text{m}$ वाले लोहे के एक ठोस घनाभाकार टुकड़े को पिघलाकर एक खोखले बेलनाकार पाइप के रूप में ढाला जाता है जिसकी आंतरिक त्रिज्या 30 cm और मोटाई 5 cm है। इस पाइप की लंबाई ज्ञात कीजिए।

10. 80 m लंबे और 50 m चौड़े एक घनाभाकार तालाब में 500 व्यक्ति डुबकी लगा रहे हैं। इस तालाब में पानी का स्तर कितना बढ़ जायेगा, यदि एक व्यक्ति द्वारा औसतन पानी का विस्थापन 0.04 m^3 है?

11. त्रिज्या 2 cm वाले 16 शीशे के गोले एक घनाभाकार पेटी में पैक किये जाते हैं, जिसकी आंतरिक विमाएँ $16 \text{ cm} \times 8\text{cm} \times 8\text{cm}$ हैं। इसके बाद पेटी में पानी भर दिया जाता है। पेटी में भरे गये पानी का आयतन ज्ञात कीजिए।

12. एक 16 cm ऊँचाई वाला दूध का बर्तन एक धातु की चादर से शंकु के एक छिन्नक के आकार का बना हुआ है। इसके निचले और ऊपरी सिरों की त्रिज्याएँ क्रमशः 8 cm और 20 cm हैं। इस बर्तन में जितना दूध आ सकता है, उसकी 22 रु प्रति लीटर की दर से लागत ज्ञात कीजिए।

13. एक 32 cm ऊँचाई और 18 cm आधार त्रिज्या वाली बेलनाकार बाल्टी रेत से भरी हुई है। इस बाल्टी को भूमि पर खाली कर लिया जाता है जिससे रेत की शंकु के आकार की एक ढेरी बनायी जाती है। यदि शंकु के आकार की इस ढेरी की ऊँचाई 24 cm है, तो इस ढेरी की त्रिज्या और तिर्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

14. एक रॉकेट का आकार एक लंबा वृत्तीय बेलन के रूप का है जिसका निचला सिरा बंद है। इसके ऊपर बेलन की आधार त्रिज्या के बराबर आधार त्रिज्या वाला का एक शंकु रखा हुआ है। बेलन के व्यास और ऊँचाई क्रमशः 6 cm और 12 cm हैं। यदि शंक्वाकार भाग की तिर्यक ऊँचाई 5 cm है, तो रॉकेट का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)।

15. एक भवन एक बेलन के आकार का है जिसके ऊपर एक अर्धगोलाकार गुंबज लगा हुआ है तथा इसमें $41\frac{19}{21}$ m^3 वायु है। यदि इस गुंबज का आंतरिक व्यास उसके फर्श से संपूर्ण ऊँचाई के बराबर है, तो इस भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

16. आंतरिक त्रिज्या 9 cm वाला एक अर्धगोलाकार कटोरा किसी द्रव से भरा हुआ है। इस द्रव को बेलनाकार बोतलों में भरा जाता है, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 1.5 cm और ऊँचाई 4 cm है। इस कटोरे को खाली करने के लिए कितनी बोतलों की आवश्यकता है?

17. ऊँचाई 120 cm और त्रिज्या 60 cm वाला एक ठोस लंब वृत्तीय शंकु 180 cm ऊँचाई वाले पानी से पूरे भरे एक लंब वृत्तीय बेलन में इस प्रकार रखा जाता है कि यह उसकी तली को स्पर्श करें। बेलन में बचे हुए पानी का आयतन ज्ञात कीजिए, यदि बेलन की त्रिज्या शंकु की त्रिज्या के बराबर है।

18. आंतरिक त्रिज्या 1 cm वाले एक बेलनाकार पाइप के माध्यम से पानी 80 cm/sec की चाल से एक खाली बेलनाकार टंकी में जा रहा है, जिसकी आधार त्रिज्या 40 cm है। आधे घंटे के बाद टंकी में पानी का स्तर कितना बढ़ जायेगा?

19. विमाओं $22m \times 20m$ वाली एक छत से वर्षा का पानी एक बेलनाकार बर्तन में जा रहा है, जिसका आधार व्यास 2m और ऊँचाई 3.5m है। यदि छत पर एकत्रित वर्षा के पानी से बेलनाकार बर्तन ठीक पूरा भर जाता है, तो cm में वर्षा ज्ञात कीजिए।

20. एक पेन स्टैंड एक घनाभ के आकार का है तथा लकड़ी का बना हुआ है, जिसमें चार शंकु के आकार के गड्ढे हैं और एक घनाकार गड्ढा है, जिनमें क्रमशः पेन और पिन रखे जा सकते हैं। घनाभ की विमाएँ 10 cm, 5 cm और 4 cm की हैं। शंकु के आकार के प्रत्येक गड्ढे की त्रिज्या 0.5 cm है और गहराई 2.1 cm है। घनाकार गड्ढे का किनारा 3 cm है। संपूर्ण स्टैंड में प्रयुक्त लकड़ी का आयतन ज्ञात कीजिए।